Compte-rendu de l'Atelier Pliages du M2 MEEF, 2nd degré, en mathématiques et du DIU associé en 2024

Cet atelier a été organisé sur 5 séances de 3 heures aux dates suivantes : 27 et 28 février, 2 et 3 avril, 15 mai, (séance de restitution). Un groupe d'une vingtaine d'étudiants (12 étudiants de M2 MEEF et 7 professeurs stagiaires à mi-temps et en formation dans le DIU) a suivi cet atelier dans le cadre de l'UE 81 du DIU « projet collectif partenarial (culturel) dans le cadre de l'interdisciplinarité : Maths Arts et Culture » et de l'UE 423 du M2 MEEF « Mathématiques Arts et Culture ». Cet atelier a été financé pour moitié par une subvention de la Diagonale Paris-Saclay et pour moitié par une subvention d'un projet APIP de la GS EFE que nous remercions très vivement. Ces subventions (au total 3490 euros) ont permis de rémunérer le travail des intervenants du CRIMP (Centre de Recherche International de Modélisation par Pliage, association basée en Lozère) qui ont conçu et animé l'atelier en lien avec les responsables et enseignants du master, en particulier avec Mélanie Guenais qui s'est beaucoup investie dans le dialogue avec Vincent Floderer, artiste origamiste. Cette année, l'atelier a été animé par **Vincent Floderer** et **Merlin Grange-Rivoire** (ingénieur qui s'est formé au pliage lors d'un stage de 6 mois pendant ses études).

Durant les 4 premières séances, les étudiants de M2 MEEF et les professeurs-stagiaires à mi-temps du DIU ont appris les différentes techniques de pliages et d'origami. Ils se sont penchés d'abord sur les plis de base, découvert ou redécouvert les pliages traditionnels et utiles, puis ont travaillé le pliage modulaire, les pliages vissés et les techniques de froissage. La dernière séance était consacrée à leur restitution, seul ou par groupe de deux ou trois, les étudiants ont réfléchi à un pliage qu'ils avaient réalisé et à ce qu'ils pourraient faire à partir de ce pliage avec leurs élèves lors de leurs cours de mathématiques.

Lors de la restitution, on a clairement vu l'apport que cet atelier a eu pour les stagiaires, ils ont clairement exprimé que ces demi-journées de formation où on a mélangé la manipulation, la réflexion sur les mathématiques et sur le travail qu'on pouvait en faire en classe les ont beaucoup aidés dans leur démarche réflexive sur leurs pratiques professionnelles. Certains ont dit qu'ils ont dû se questionner sur la façon de donner une consigne précise. D'autres, très peu réceptifs au départ car en difficulté sur la manipulation, ont dû s'obliger à travailler avec leurs collègues et accepter leur aide, ce qui leur a permis de mieux comprendre des difficultés de certains de leurs élèves ou les leurs dans leur établissement. Ils ont été surpris que cet atelier leur ait permis de sortir de leurs habitudes et les oblige à réfléchir à leurs pratiques professionnelles bien plus facilement qu'en formation habituelle.

Cette année, les calendriers des vacances et du concours ont fait qu'il y a eu beaucoup plus de temps entre les ateliers et la séance de restitution. Par rapport à l'an dernier, pour pallier au manque d'anticipation des étudiants et pour motiver les séances, les objectifs de l'ateliers et les consignes pour la restitution ont été écrits et distribués format papier dès le départ, (voir annexe 1). Ceci a permis aux étudiants et aux professeurs stagiaires de produire des écrits riches qui ont montré l'intérêt porté par cet atelier. Le groupe de cette année a plutôt choisi de faire des objets assez simples au niveau du pliage et de réfléchir plus aux mathématiques qu'ils pourraient faire avec leur élèves en utilisant leur objet. On a clairement vu un réinvestissement des séances de préparation à l'oral 1 du CAPES comme du travail qu'ils font en stage dans la préparation des restitutions de cet atelier : ils ont beaucoup réfléchi aux mathématiques qui sont associées à leurs pliages et les ont non seulement traduites dans leur langage usuel (celui de l'enseignant de mathématique certifié ou agrégé qu'ils sont ou seront), mais aussi ils ont vraiment essayé de faire de vraies transpositions didactiques adaptées à des élèves de différents niveaux que ce soit au collège et comme au lycée. Elles ont été très variées, un binôme a même proposé une construction successive des fractions $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, qu'ils pouvaient continuer et ainsi leur permettrait d'initier une discussion en classe sur la récurrence (voir annexe 2).

Avec le soutien de la Graduate School Education Formation Enseignement de l'Université Paris-Saclay, et de la Diagonale Paris-Saclay

Décrivons deux projets conçus plus en détail. Un binôme a décidé de faire construire un gros « cube-infini » à partir de 8 petits cubes reliés entre eux par un système d'accroches (voir annexe 3). Au départ, ces deux étudiantes avaient envie d'avoir dans leur classe un objet manipulable « à l'infini » anti-stress pour pouvoir mieux inclure certains élèves à besoin particulier. Elles ont prévu de faire construire plusieurs cubes-infini en classe lors d'un travail en groupe, pour chaque niveau de la classe, elles ont aussi prévu une activité mathématique associée : un travail de vocabulaire, de repérage, d'apprentissage de la perspective cavalière au collège, alors qu'au lycée elles avaient prévu des activités sur les vecteurs mais aussi sur les équations de droite. Un autre binôme avait choisi un pliage très simple au départ (des boîtes de pâtissier), ils voulaient avoir un objet de la classe qui permette à une classe de visualiser géométriquement l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ ou plutôt $(a+b)^2 = a^2+ab+b^2+ba$ (voir annexe 4). Ils pensaient avoir fait le plus difficile en imaginant leur création mais la mise-en-œuvre a été bien moins simple que celle à laquelle ils avaient pensée : en bons professeurs de mathématiques, ils avaient pris des feuilles sans épaisseur… et se sont heurtés à la dure réalité de refaire plusieurs petites boites car elles ne se rangeaient pas dans la grande facilement car ils n'avaient tenu compte de l'accumulation d'une dizaine d'épaisseurs de papier en tout. Ceci va leur permettre aussi de travailler avec leurs élèves sur les approximations et les arrondis. Le lecteur trouvera en annexe 5 et 6 d'autres exemples de restitution.

Après la séance de restitution, de midi à 13h30, les étudiants avaient organisé un repas partagé, on leur avait fourni des boissons, du café et des friandises. Les stagiaires des autres groupes du DIU, les étudiants du M1 MEEF maths, ceux du L3 maths parcours M2E ainsi que les formateurs et enseignants du master qui étaient libres pouvaient venir rencontrer les participants de l'atelier pliage qui avaient mis en valeur leurs réalisations pour les exposer et qui leur ont expliqué ou les pliages ou le travail qu'ils comptent faire faire à leurs élèves.

Nous remercions **M. Relid (COMPAS)** pour les interviews de participants réalisés après la séance de restitution. Le CRIMP monte un reportage qui nous sera transmis dès que possible.

Je tiens à remercier une nouvelle fois très chaleureusement la GS EFE et la Diagonale Paris-Saclay pour la confiance qu'ils nous ont fait en nous permettant d'organiser cet atelier de pliage dans le cadre des unités « Maths, Art et Culture » pour ces jeunes professeurs de mathématiques.

Anne BROISE
(responsable du M2 MEEF, 2nd degré,
Mathématiques et du DIU associé)

Annexe 1 : **fiche de description de l'atelier et consignes pour la restitution :**

Atelier Pliages
(dans le cadre de l'UE Maths Arts et Culture)

Compétences transversales, disciplinaires et didactiques visées par cette UE :

- Développer les gestes techniques de l'origami et la créativité autour de cette activité.
- Travailler en coopération avec ses pairs, en étant actif au cours des séances et dans sa préparation et dans l'écoute lors de la restitution des autres groupes.
- S'exprimer devant le public de manière claire et compréhensible
- Utiliser le vocabulaire précis en lien avec les notions mathématiques en jeu
- Argumenter de manière organisée et rigoureuse, en distinguant les observations des propriétés exposées de manière à faire apparaitre clairement le raisonnement.
- Articuler la pratique créatrice de l'origami avec la pratique de classe, en ancrant la manipulation dans une démarche de compréhension des objectifs d'apprentissage et en laissant la place pour la créativité et l'autonomie des élèves.

Modalités de la séance de restitution (15 mai 9h-12h) :

Présentation orale devant le groupe, par binôme de préférence, d'une durée de 10 à 15 min, suivie de 5 min de questions.
Rendu d'une synthèse de 2 pages de la présentation orale (hors annexes)

Contenu de la présentation :
- Présentation de l'objet créé en précisant ce qui a motivé le choix de cette construction.
- Présentation du principe de sa fabrication, puis de quelques-unes de ses propriétés géométriques.
- Identification des notions mathématiques pouvant être mises en lien avec l'objet présenté.
- Proposition de pistes d'utilisation possibles de cet objet dans un contexte de classe en précisant les objectifs des apprentissages mathématiques qui sont visés, et en quoi l'objet peut constituer une aide à la réalisation de cet objectif.

On joindra en annexe les diagrammes et les preuves détaillées en lien avec ce qui aura été présenté.

La séance de restitution sera suivie d'une petite exposition pour le groupe 3 et d'un repas en commun pour discuter des ateliers pliages et théâtre.

Avec le soutien de la Graduate School Education Formation Enseignement de l'Université Paris-Saclay, et de la Diagonale Paris-Saclay

Annexe 2 – Partage en parts égales ou construction de fractions unitaires

I. Présentation de l'objet

Nous présentons dans cette séance de restitution une méthode pour plier une feuille en trois, quatre, cinq, etc… parties égales. Nous avons choisi ce sujet car il fait intervenir un problème qu'on pense a priori ne pas savoir résoudre. Il est facile de plier une feuille de papier en deux parties égales, puis en quatre parties égales, puis en huit parties égales, c'est-à-dire toutes les puissances de deux. Mais quand est-il de partager sa feuille en trois, cinq, six, sept parties égales ?

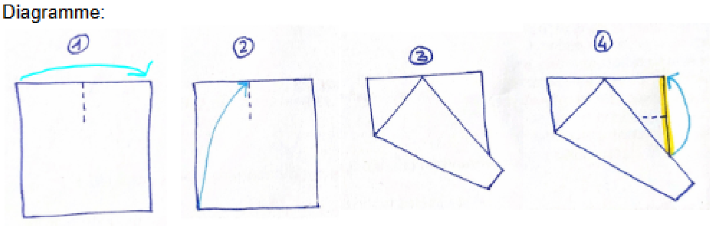
Ce sujet fait donc intervenir la construction des fractions unitaires, qui sont les fractions telles que leur numérateur est 1 et le dénominateur est un entier non nul positif: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, etc…

Les fractions unitaires sont des réels constructibles, c'est-à-dire qu'ils peuvent s'obtenir à la règle non graduée et au compas à partir d'un segment donnée de longueur 1. Les inverses de puissance de 2 ($\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$, …) sont facilement constructibles (comme décrit précédemment), mais la construction des autres fractions unitaires telles que $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, etc … l'est beaucoup moins !

II. Présentation du principe de fabrication

Matériel: une feuille carrée

Diagramme:

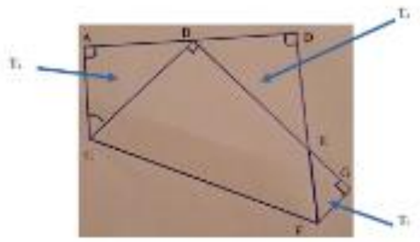


Le dernier marquage effectué (correspondant au milieu du segment jaune) est le tier de la longueur du côté du carré. Mais comment cela se fait-il ?

III. Notions mathématiques sous-jacentes

Nous allons démontrer que la longueur du segment jaune (étape 4 du diagramme) est égale à $\frac{c}{3}$.

Sur notre figure obtenue, nous plaçons les points A, B, C, D, E, F et G et nous codons la figure avec les angles droites correspondant aux angles de notre carré initial.



a) Démontrons que les triangles T_1 et T_2 sont semblables.

Les points A, B, D sont alignés donc $\widehat{ABD} = 180°$.

On a donc

$\widehat{ABC} + \widehat{CBE} + \widehat{EBD} = 180$ comme $\widehat{CBE} = 90$

$\Leftrightarrow \widehat{ABC} + \widehat{EBD} = 180 - 90$

$\Leftrightarrow \widehat{ABC} = 90 - \widehat{EBD}$

Dans le triangle T_1, comme la somme des angles dans un triangle vaut 180°

on a $\widehat{ABC} + \widehat{CAB} + \widehat{BCA} = 180$ comme $\widehat{CAB} = 90$

$\Leftrightarrow \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 90$ comme $\widehat{ABC} = 90 - \widehat{EBD}$

$\Leftrightarrow 90 - \widehat{EBD} + \widehat{BCA} = 90$

$\Leftrightarrow \widehat{EBD} = \widehat{BCA}$

On a donc $\widehat{CAB} = \widehat{BDE}$ et $\boxed{\widehat{EBD} = \widehat{BCA}}$

Les angles $\widehat{FEC}$ et $\widehat{BED}$ sont opposés par le sommet donc ils sont de même mesure.

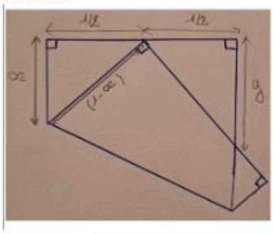
Les triangles T_2 et T_3 ont leur angles deux à deux de même mesure, donc ils sont semblables.

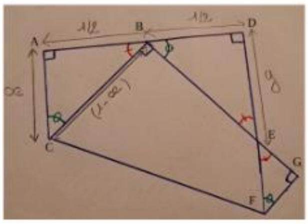
Avec le soutien de la Graduate School Education Formation Enseignement de l'Université Paris-Saclay, et de la Diagonale Paris-Saclay

Remarque: le triangle T_3 est aussi un triangle semblables à T_2 , mais nous n'en avons pas besoin pour la démonstration.

b) Démontrons que le segment jaune est de longueur $\frac{2}{3}$.

Nous ajoutons à la figure la longueur du côté connue et on note x et y des longueurs inconnues.





On sait que le triangle T_1 est un triangle rectangle en A.
On peut utiliser le théorème de Pythagore :

$x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = (1-x)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{4} = 1 - 2x + x^2$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{8}$

On sait que T_1 et T_2 sont semblables, alors il existe un coefficient c_1 appartenant à $\mathbb{R}$ tel que
$\begin{cases} BD \times c_1 = AC & (1) \\ DE \times c_1 = AB & (2) \\ BE \times c_1 = CB \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow c_1 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

$\Leftrightarrow c_1 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$(2) \Leftrightarrow y \times c_1 = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2c_1}$

$\Leftrightarrow y = \frac{2}{3}$

c) Construisons $\frac{1}{3}$.

Pour construire le réel $\frac{1}{3}$, il suffit de marquer le pli au milieu du segment jaune de longueur $y = \frac{2}{3}$ car $y = \frac{2}{3} \iff \frac{y}{2} = \frac{1}{3}$. Ceci prouve que le pli de l'étape 4 du diagramme de construction correspond au tiers du côté du carré.

<u>Remarques</u>:

- Cette méthode ne marche uniquement avec un carré.
- Nous montrons et démontrons en annexes comment construire les autres fractions unitaires.

IV. Pistes d'utilisation en classe

Nous pourrions proposer cette méthode à partir de la classe de 4e, puisque toutes les notions mathématiques auront été vues.

Motivation

Pour motiver la classe à déterminer géométriquement les fractions unitaires, objectif qui n'est pas forcément très parlant et très motivant à première vue, nous proposons de leur demander de plier une feuille de papier (de forme carrée) en trois parties égales pour la faire rentrer dans une enveloppe. Plier une lettre en trois pour la faire entrer dans une enveloppe est une action assez répandue, et si on est maniaque, on pourrait se creuser les méninges pour que ce soit en trois parts égales ! Une fois qu'ils auront tenté de plier leur feuille de papier en trois parts égales, ils se rendront compte que ce n'est pas tâche facile.

Construction guidée

Nous leur proposons ensuite la construction présentée en partie 2, puis une série de questions pour qu'ils démontrent les résultats de la partie 3, c'est à dire que le point trouvé est $\frac{2}{3}$, et qu'il ne reste plus qu'à plier la longueur $\frac{2}{3}$ en deux pour obtenir $\frac{1}{3}$.

Intuiter la récurrence

Maintenant qu'ils ont placé $\frac{1}{3}$ sur leur carré et qu'ils ont plier le carré en trois parts égales, vient un nouveau problème: comment partager ma feuille en cinq parties égales (quatre est très intuitif et faisable sans méthode à démontrer). Nous essayerons donc de leur faire sentir que pour placer $\frac{1}{3}$, nous avons utilisé $\frac{1}{2}$, donc pour construire $\frac{1}{5}$, nous aurions besoin de $\frac{1}{4}$, et pour construire $\frac{1}{4}$, nous aurions besoin de $\frac{1}{3}$. Cela tombe bien, nous l'avons déjà construit ! Ils comprennent donc que pour construire la fraction $\frac{1}{N}$, il faut avoir construit au préalable $\frac{1}{N-1}$, et donc que toutes les fractions unitaires s'obtiennent de manière successive.

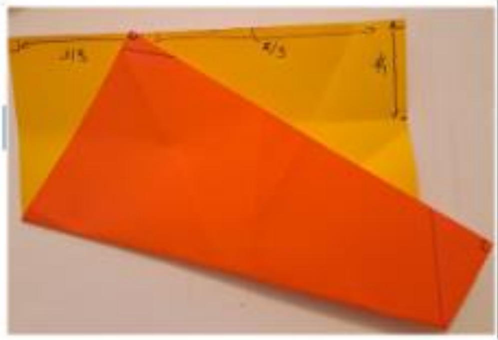
Application et récompense

Nous pourrions proposer aux élèves une utilisation de cette méthode au sein d'un pliage amusant. Cela permettrait aussi de montrer l'utilité d'une telle méthode dans l'art. Nous avons choisi pour cela la boîte du pâtissier. Ce pliage est très accessible, les élèves n'ayant pas l'âme d'artiste pourraient aimer ce pliage de par sa simplicité, surtout après avoir réfléchi sur le problème précédant ! Pour construire la boîte du pâtissier, nous avons besoin de plier la feuille de départ (un carré) au tiers et au deux tiers de la longueur, pour obtenir

Avec le soutien de la Graduate School Education Formation Enseignement de l'Université Paris-Saclay, et de la Diagonale Paris-Saclay

1. Démonstration construction des autres fractions unitaires

Le professeur japonais Kazuo Haga, a trouvé ce procédé de pliage permettant ainsi d'obtenir toutes les fractions unitaires.



On peut obtenir $\frac{1}{4}$ par la même méthode en pliant, à l'étape 2, le coin inférieur gauche sur le marquage du $\frac{1}{3}$ obtenu précédemment.

Nous allons démontrer que cette méthode de pliage nous permet de construire les fractions unitaires de façon successive, c'est-à-dire que nous construisons la fraction $\frac{1}{N+1}$ grâce à la fraction $\frac{1}{N}$, N étant un entier naturel non nul.

Par le théorème de Pythagore on a que

$$x^2+\left(\frac{1}{N}\right)^2=(1-x)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{N}\right)^2 = 1-2x$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{N^2-1}{N^2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{N^2-1}{2N^2}$$

Par le procédé de pliage et la propriété sur la figure démontré dans la partie 2.a, T_1 et T_2 sont semblables.
On a donc l'existence d'un coefficient d'agrandissement ou de réduction noté c, tq $c \in \mathbb{R}_+^*$

D'où $x = c \times \frac{N-1}{N}$

$$\Leftrightarrow \frac{N^2-1}{2N^2} = c \times \frac{N-1}{N}$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{N^2-1}{2N(N-1)}$$

On a aussi

$$\frac{1}{N} = c \times y$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{cN} = y$$

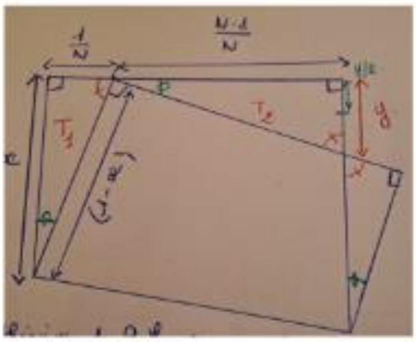
$$\Leftrightarrow \frac{2N(N-1)}{N(N^2-1)} = y$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(N-1)}{N^2-1} = y$$

$$\Leftrightarrow \frac{N-1}{(N+1)(N-1)} = \frac{y}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{N+1} = \frac{y}{2}$$

Conclusion : on a bien que $\frac{y}{2} = \frac{1}{N+1}$



Annexe 3 – Le cube infini

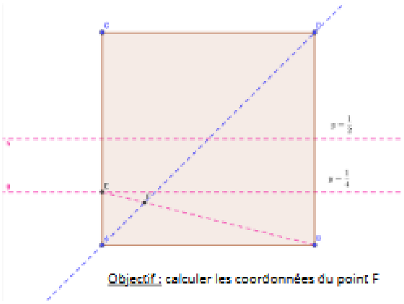
Pliage : Le cube infini

Avec Aurélie, on a construit un cube infini, c'est-à-dire qu'on peut le manipuler à l'infini. Il nous a intéressé parce qu'il peut avoir un effet anti-stress sur la personne qui le manipule.

Pour ce faire, on a construit 8 petits cubes avec des accroches pour ensuite les assembler et avoir notre objet terminer.

Pour chaque petit cube, la première étape est de marquer un quadrillage de 5x5. On pourrait faire des divisions et mesurer à la règle mais cela est long et moins précis que la méthode qu'on a utilisée. Avec seulement 4 plis supplémentaires, on va marquer le quadrillage en entier et sans difficulté. C'est donc là que nous allons étudier les mathématiques qui se cachent derrière ces 4 plis.

On a modélisé grâce au logiciel Geogebra la feuille carré ainsi que les 4 plis qui sont faits. Pour tous les calculs, on prend le repère (A ; B, C)



Objectif : calculer les coordonnées du point F

F est l'intersection de 2 droites donc il suffit de résoudre un système d'équations à 2 inconnues.

Pour cela, on a besoin d'une équation pour chaque droite.

La première droite a pour équation : $y = x$

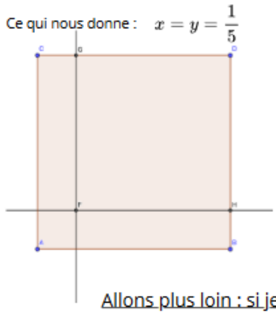
La deuxième droite passe par E et B donc on peut calculer une équation de la droite à partir des coordonnées :

$E\left(0; \frac{1}{4}\right)$ et $B\,(1; 0)$ Donc on obtient : $y = \frac{-1}{4}x + \frac{1}{4}$

Donc pour trouver les coordonnées du point F, il suffit de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} y = x \\ y = \frac{-1}{4}x + \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = \frac{-1}{4}x + \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 4x = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 5x = 1 \end{cases}$$

Ce qui nous donne : $x = y = \frac{1}{5}$



Ainsi, avec ce point F, on peut construire la première colonne et la première ligne de notre quadrillage. Pour le reste du quadrillage, il suffit de réaliser un 4x4 sur le carré FGDH.

Allons plus loin : si je veux un quadrillage en n parts égales et non 5

Analyse : On s'inspire du cas n=5. L'équation de la deuxième droite avait des coefficients opposés.

Donc cette fois, on décide que la deuxième droite a pour équation : $y = -ax + a$
$y = a\,(1 - x)$

Or, F est l'intersection des deux droites, donc on a $a = \frac{x_F}{1 - x_F}$

Donc comme on veut $x_F = \frac{1}{n}$, on a $a = \frac{1}{n-1}$

Synthèse : Il suffit de refaire les mêmes calculs que pour n=5 et on obtient que F a pour coordonnées : $F\left(\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right)$

Donc au lycée on peut étudier les équations de droites et les intersections de droites avec calcul des coordonnées du point d'intersection. Mais dès le collège, juste en ayant l'objet dans les mains, on peut déjà étudier les mathématiques.

En effet, on peut commencer par aborder toutes les notions géométriques du cube : le vocabulaire des arrêtes, des sommets et des faces ; la définition d'un cube ; le nombre de faces, sommets et arrêtes d'un cube ; les différentes vues pour les représentations cavalières.

On peut également s'en servir de support pour le repérage dans l'espace dans un pavé droit.

On peut aussi s'en servir pour la notion de section plane d'un cube en démontant le cube infini.

Ainsi, cet objet peut être utilisé en classe à différents niveaux :

Avec le soutien de la Graduate School Education Formation Enseignement de l'Université Paris-Saclay, et de la Diagonale Paris-Saclay

Annexe 4 – Identité remarquable

Synthèse pliage : Illustrer une identité remarquable

Présentation des objets créés :

Nous avons décidé de construire une boîte de base carrée dans laquelle nous pourrons placer différents pavés droit de manière à ce qu'ils la remplissent parfaitement afin d'illustrer l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

La première étape a été de concevoir la boîte avec la méthode la plus simple possible tout en faisant en sorte que ses dimensions soient adéquates pour pouvoir y placer ensuite les pavés droit : il fallait que la base carrée de la boîte soit suffisamment grande pour que les manipulations se fassent dans les meilleures conditions et donc que la profondeur de la boîte ne soit pas trop importante. De plus, il fallait veiller à ce que la longueur de la base carrée puisse s'écrire facilement comme a + b avec a et b des nombres décimaux.

Présentation de la méthode de construction :

Les étapes de construction de la boîte sont détaillées en annexe.

La méthode que nous avons choisie est pratiquement la même que celle utilisée pour fabriquer la boîte des imprimeurs. Cependant puisque nous souhaitions fabriquer une boîte à base carrée et non rectangulaire, il a fallu légèrement la modifier. En effet, lors de la construction d'une boîte à base rectangulaire en suivant la méthode de fabrication de la boîte des imprimeurs, des "languettes" apparaissent d'elles-mêmes. Si la boîte est à base carrée, elles ne vont pas apparaître lors de la construction or ce sont ces languettes qui vont permettre de maintenir la boîte en place.

Pour construire nos languettes, nous sommes partis d'une feuille A3 et nous avons décidé arbitrairement de la taille d'une languette (en prenant garde à ce qu'elle ne soit pas excessivement grande). Puis nous avons fait en sorte d'obtenir un carré, dont les côtés mesurent la même longueur que la largeur de notre feuille A3, avec des languettes le long de deux de ses côtés opposés. (Étapes 1 à 3 en Annexe).

Une fois notre carré avec ses languettes obtenu, nous avons suivi la méthode de la boîte des imprimeurs (Étape 4). Mais lorsque nous avons terminé notre construction et obtenu une boîte à base carrée, nous avons constaté que la boîte n'était pas suffisamment grande (les côtés du carré que formait sa base mesuraient seulement la moitié de la largeur de la feuille A3 de départ).

Nous avons donc décidé de plier une nouvelle fois les bords de notre carré en 2 afin de nous retrouver avec une boîte deux fois moins profonde et donc avec une base plus grande. Après ces nouveaux plis (Étape 5), nous avons pu finir notre construction en réalisant les dernières étapes de la méthode de la boîte des imprimeurs, c'est-à-dire rabattre les coins de notre carré et écarter les bords (Étapes 6 et 7).

Une fois notre boîte obtenue, nous avons constaté que ses dimensions étaient les suivantes : $\frac{3}{4}$ en longueur et en largeur et $\frac{1}{8}$ en profondeur (en prenant la largeur d'une feuille A3 pour unité). Nous avons donc choisi de décomposer la base carrée de longueur $\frac{3}{4}$ comme $\frac{1}{4} + \frac{2}{4}$. Ainsi, nous avons décidé d'illustrer l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ pour $a = \frac{1}{4}$ et $b = \frac{2}{4}$.

Il ne restait plus qu'à construire 4 pavés droits dont les bases sont respectivement : un carré de longueur $\frac{1}{4}$, deux rectangles de longueur $\frac{2}{4}$ et de largeur $\frac{1}{4}$ et un carré de longueur $\frac{2}{4}$. Pour les construire, il nous a suffi de suivre la méthode de la boîte des imprimeurs en partant respectivement : d'un carré de longueur $\frac{1}{2}$ avec des languettes, de deux rectangles de longueur 1 et de largeur $\frac{1}{2}$ et d'un carré de longueur 1 avec des languettes.

Notion mathématiques en lien avec les objets :

Nous avons construit une boîte dont la base est un carré de côté $\frac{1}{4} + \frac{2}{4}$ et dans laquelle vont parfaitement rentrer deux pavés droit dont les bases mesurent $\frac{1}{4}$ sur $\frac{2}{4}$ et deux pavés droit dont les bases sont des carrés de côté $\frac{1}{4}$ et $\frac{2}{4}$. Cela signifie que l'aire de la base de notre boîte, qui est égale à $(\frac{1}{4} + \frac{2}{4})^2$ est égale à la somme des aires des 4 pavés droit, qui est égale à $(2 \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{4}) + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{2}{4})^2$. Ainsi nos constructions traduisent l'égalité : $(\frac{1}{4} + \frac{2}{4})^2 = (2 \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{4}) + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{2}{4})^2$.

Il est possible de construire des boîtes carrées de dimensions différentes permettant d'illustrer l'identité remarquable pour d'autres valeurs de a et de b.

Pistes d'utilisation de l'objet :

La boîte et les 4 pavés droits que nous avons construits peuvent être utilisés au sein de la classe dans le cadre d'un cours qui porte sur le calcul littéral et plus précisément sur l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 +2ab + b^2$. L'objectif de la séance serait pour les élèves qu'ils comprennent et soit capable de l'appliquer.

Les constructions peuvent être utilisées pour illustrer l'identité remarquable en fournissant un exemple géométrique plus visuel que l'égalité ce qui permet à la fois une meilleure compréhension de cette identité et favorise la mémorisation en fournissant un moyen de la retrouver par une figure simple (un carré divisé en 2 carrés et 2 rectangles) que les élèves peuvent reproduire sur du brouillon.

Avec le soutien de la Graduate School Education Formation Enseignement de l'Université Paris-Saclay, et de la Diagonale Paris-Saclay

[…] Constructions obtenues

__Étape 7 :__ Vous obtenez un octogone avec deux languettes comme sur la Figure 12. Il suffit d'écarter les bords (Figure 13) pour obtenir une boîte de base un carré de longueur $\frac{3}{4}$ de la largeur d'une feuille A3 et de profondeur égale à $\frac{1}{8}$ de la largeur d'une feuille A3.

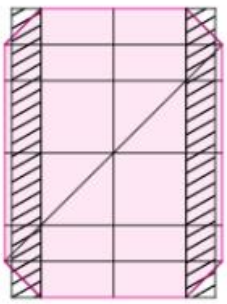


Figure 12 : Octogone avec languettes

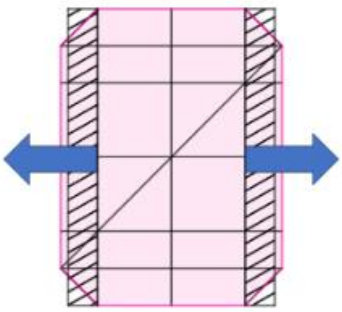


Figure 13 : Écarter les bords

On obtient alors la boîte suivante :

- Boites à base carré de côté a et de côté b :

- Boites à base rectangulaire de largeur a et de longueur b :

- Résultat final :

Annexe 5 – Modules sonobe et origami modulaire

*Avec le soutien de la Graduate School Education Formation Enseignement de l'Université Paris-Saclay,
et de la Diagonale Paris-Saclay*

Un autre exemple de restitution (les étudiants voulaient un très gros objet et se sont contentés de ce qu'ils sont arrivés à produire).

Module Sonobe et origami modulaire

Le module Sonobe est une construction simple et élémentaire de l'origami modulaire. En assemblant plusieurs modules entre eux, on obtient rapidement de jolis solides complexes, ce qui est la raison pour laquelle nous nous y sommes intéressés.

Chaque module a été réalisé à l'aide d'un protocole de pliage et d'une feuille de papier carrée dont chaque pli était marqué à l'avance afin d'augmenter la précision et faciliter l'emboîtement des modules.

I Le cube et ses dérivés

Avec 6 modules, on peut très rapidement construire un cube.

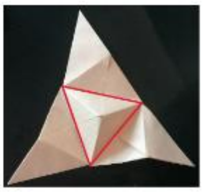
En fin cycle 3, début cycle 4 (6e et 5e), il est possible par ce biais d'aborder la séquence sur les solides de l'espace par la construction de polyèdres réguliers à l'aide de l'origami modulaire. On peut par exemple demander à chaque élève de réaliser quelques modules, nécessaires à l'assemblage du cube, en suivant les instructions pour plier la feuille de papier. Ce serait une introduction assez ludique de cette séquence, qui permet ensuite de présenter les différentes propriétés du cube (nombre de faces, sommet, arêtes) et d'utiliser le vocabulaire associé.

Par ailleurs, le pliage modulaire demande beaucoup de précision. En Effet, les imprécisions des modules peuvent rendre l'assemblage des modules complexe voir impossible. Ce serait donc une bonne occasion pour parler de la nécessité et l'importance d'une certaine rigueur en mathématiques, que ce soit en géométrie mais aussi dans tous les autres domaines.

Par la suite, on se rend compte qu'on peut assembler plusieurs cubes permettant de créer librement des figures encore plus complexes. Une question qu'on se pose naturellement est: "Combien de modules sont nécessaires pour construire un solide de ce type ?". Cette

question plus difficile peut être l'objet d'un travail de recherche qui incite à expérimenter.

II Vers des solides de Platon



La structure suivante est commune à toutes les constructions utilisant le module Sonobe. Néanmoins, elle ne se limite pas aux dérivés du cube.
A la base de cette structure, on identifie un triangle équilatéral. On peut alors construire

deux autres solides.
En réalité, ces deux solides entretiennent un lien avec l'octaèdre et l'icosaèdre. En effet, on retrouve ces solides en remplaçant chacune des pyramides par sa base triangulaire. De cette façon, on retrouve tous les solides de Platon à face triangulaire, le tétraèdre devenant alors le cube.

Avec le soutien de la Graduate School Education Formation Enseignement de l'Université Paris-Saclay, et de la Diagonale Paris-Saclay

Annexe 6 – Pliage WXYZ

Voici un autre exemple de restitution des étudiants cette fois-ci avec un objet plus « spectaculaire »:

Autour du pliage WXYZ

Présentation de l'objet, motivation

Le pliage que nous avons choisi de présenter s'appelle WXYZ. Il s'agit d'un modèle créé par Tung Ken Lam. C'est un pliage modulaire : il est formé de douze modules répartis équitablement en quatre couleurs. Ces modules viennent ensuite d'assembler par couleur, donc trois par trois, afin de former un triangle, que l'on peut assimiler à un plan. Les quatre plans - W, X , Y et Z - s'assemblent ensuite pour donner le pliage complexe que l'on peut observer ci-contre.

Ce pliage s'inscrit dans une classe plus vaste qui sont les origami d'intersection de plans. Ils respectent tous la même idée de triangles, ou de rectangles, formés de quelques modules, qui viennent s'intersecter.

Nous avons choisi de présenter ce pliage car nous avons beaucoup apprécié la présentation du pliage modulaire. En effet, puisque l'on doit fabriquer un certain nombre de modules, on s'approprie réellement la construction de ce modèle. Aussi, la facilité relative de ces modules permet de plier à plusieurs, et de passer un moment convivial ensemble. Puis, avec l'assemblage, vient un peu de difficulté, où il faut souvent réfléchir à plusieurs pour réussir à former le pliage correctement. Ainsi, le pliage modulaire, et en particulier WXYZ, représente un parfait alliage entre simplicité, plaisir, et un peu de challenge.

Présentation du principe de fabrication

Comme mentionné précédemment, le pliage WXYZ est formé des douze modules, répartis équitablement en quatre couleurs. Chaque module a la forme d'un cerf-volant, c'est-à-dire de deux triangles isocèles collés le long de leur base. Pour faire un module, on commence par construire un premier triangle isocèle, le plus grand. Pour cela, on plie notre carré en deux, et on trace un côté de notre triangle isocèle, que l'on reporte afin d'obtenir le début de notre triangle. On vient ensuite compléter notre cerf-volant, en faisant le second triangle isocèle avec ses languettes (voir ci-contre et en annexe).

Le premier triangle isocèle donne à l'assemblage un tiers d'un triangle équilatéral. Le second triangle isocèle sert quand à lui emboîter les différents modules, puisqu'il est doté de poches et de languettes afin de pouvoir s'assembler entre eux. En emboîtant trois modules, on obtient donc un triangle équilatéral. Assemblés ensemble, cela donne WXYZ.

Quelques propriétés mathématiques autour de WXYZ

Lors de la construction, on construit dans chaque triangle isocèle la droite remarquable issue du sommet opposé à la base. Ainsi, en combinant les trois modules pour former un triangle équilatéral, on se fait intersecter volontairement les trois droites remarquables, et on peut donc observer qu'elles sont concourantes.

Les quatre triangles équilatéraux ont le même point pour centre.

Le solide obtenu est inscrit dans un cuboctaèdre.

WXYZ en classe

Une activité en 5ème/4ème :

- Modalités et objectif. Travail de groupe, en trinômes. Activité sur les droites remarquables du triangle et les solides.
- 1ère phrase. Réalisation par chaque élève d'un module, avec explications pas à pas du professeur puis assemblage de trois modules.
- 2ème phase. Questions sur l'assemblage obtenu : quel polygone observe-t-on ? Faire observer les droites remarquables, que l'on voit par pliage.
- 3ème phase. Rappel sur les droites remarquables du triangle, cas particulier du triangle équilatéral et point d'intersection.
- 4ème phase. Créations des modules manquants et assemblage décortiqué et guidé pour obtenir le montage final.
- 5ème phase. Conjectures sur le pliage obtenu : point d'intersection ? Commentaires sur le solide (vocabulaire à réinvestire).
- 6ème phase. Bilan de l'activité, utilisation de Geogebra pour observer les conjectures.
- Plus-value : Manipulation avec les élèves. Visualisation des droites remarquables dans le triangle : elles apparaissent nettement, et naturellement (on en a besoin pour plier). Cela permet de donner du sens à cette notion. De plus, avoir concrètement le solide dans les mains permet de s'appuyer dessus pour utiliser le vocabulaire.

Une activité en Terminale Spécialité :

- Modalités et objectif. Travail de groupe, en trinômes. Activité sur les positions relatives et intersection de plans.
- En amont : rappels sur les caractérisations vectorielles des droites et des plans dans l'espace, et sur les positions relatives de plans.
- 1ère phrase. Réalisation par chaque élève d'un module, avec explications pas à pas du professeur puis assemblage de trois modules ensemble.

Avec le soutien de la Graduate School Education Formation Enseignement de l'Université Paris-Saclay, et de la Diagonale Paris-Saclay